TITLE:

ポートフォリオの信用リスク計測モデル ーシミュレーションと解析的手法の融合ー

AUTHOR(S):
室町, 幸雄

CITATION:
室町, 幸雄. ポートフォリオの信用リスク計測モデル ーシミュレーションと解析的手法の融合ー. 調査と研究 : 経済論叢別冊 2003, 27: 43-52

ISSUE DATE:
2003-10

URL:
https://doi.org/10.14989/44563

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

経済論叢別冊　調査と研究（京都大学）第27号，2003年10月

〈金融工学のフロンティア〉

ポートフォリオの信用リスク計測モデル*

――シミュレーションと解析的手法の融合――

室　町　幸　雄

I 序

金融機関にとって，自社の抱えるポートフォリオのリスク計測は BIS 規制や金融庁検査に対応するためだけでなく，経営管理・戦略策定の上でも非常に重要である。金融にはさまざまなリスクがあるが，これまで主に計量化が進められてきたのは市場リスクと信用リスクである。市場リスクの標準モデルは RiskMetrics である。信用リスクにはまだ標準と言えるモデルはないが，JPMorgan［1997］の CreditMetrics と Credit Suisse Financial Products［1997］の CREDITRISK＋が有名である。また，この二種類のリスクを同時に統合評価するモデルも，Kijima and Muromachi［2000］により提案されている。

上述の信用リスク計測モデルのうち，CreditMetrics と Kijima－Muromachi モデル（以下では KM モデルと略）ではポートフォリオの将来価格の分布をモンテカルロ・シミュレーションにより算出する。一方，CREDITRISK＋では損失額の分布を解析的な計算だけで算出する。本稿では，前者のタイプのモデルをシミュレーション法，後者のタイプを解析法と呼ぶ。解析法の計算負荷は軽いが，かなり厳しい仮定が必要になる。逆に，シミュレーション法の計算負荷は重いが，柔軟な作り込みが可能である。リスク計測の現場ではどちらの手法も使われているが，柔軟な作り込みが可能なためか，大規模な内部モデルを構築する力のある都市銀行ではシミュレーション法が好まれているようである。

最近はポートフォリオのリスク尺度として，VaR とともに CVaR が理論的に優れたリスク尺度として注目されるようになった[1)]。また，地震のような天災によるカタストロフィック・リスクの計量化も行われるようになり，分布のテイルの形状に対する関心はますます高まってきた。ところが，シミュレーション法によるリスク量の推定値は意外と不安定であることが指摘されるようになった。山井・吉羽［2001a］は，デフォルト相関のある与信ポートフォリオや株式オプション・ポートフォリオの損失額分布をシミュレーションにより計算し，テイルの厚い分布では VaR や CVaR の推定値が不安定化し，その不安定化は CVaR の方がより顕著であることを示した。また，室町［2001］は，社債ポートフォリオの将来価格分布をシミュレーションにより計算し，ポートフォリオ全体の VaR や CVaR に対する個別資産の寄与（以下ではリスク寄与度と略）の推定結果が，条件によっては極めて不安定になることを報告した。

ポートフォリオの将来価格（または損失額）の分布やリスク寄与度が解析的に計算できれば，推定値はシミュレーション法よりも遥かに安定する。しかし，そのためには厳しい仮定が必要であり，柔軟な作り込みは困難になる。

ところで，解析法の一つに鞍点法がある。鞍点法は工学分野でよく使われる近似法であり，Arvanitis and Gregory［1998］と Arvanitis et al.［1999］は，鞍点法を用いて損失額分布を

---

*　本稿作成に当たり，指導教官である木島正明教授には暖かいご指導と貴重なコメントを頂戴した。ここに謝意を表したい。もちろん，本稿の全ての誤りは著者に帰する。

1)　Artzner et al.［1999］，山井・吉羽［2001b］，［2001c］を参照されたい。

算出し，特に分布のテイルで高精度の結果が得られることを示した。Martin et al. [2001a] は，ある離散的な潜在変数が具体的に与えられれば，その条件のもとでデフォルトは独立に発生するという条件付独立なデフォルトモデル[2)]を考えて，まず鞍点法を用いて条件付分布を求め，その期待値として無条件分布を算出する方法を提案した。さらに Martin et al. [2001b] は，鞍点法を用いてポートフォリオの VaR に対する各資産のリスク寄与度を求める方法を提案した。

本稿では，Martin et al. [2001a] の考え方を拡張した信用リスク計測手法を提案し，その応用例を示すとともに，より高精度な推定方法を提案する。さらに，その推定方法を用いると，膨大なシナリオ数のシミュレーションと同程度の精度の結果が，ごく少数のシナリオから得られることを示す。本稿で提案する手法はシミュレーション法と解析法を混合したものなので，以下ではハイブリッド法と呼ぶ。ハイブリッド法の適用範囲は非常に幅広く，損失額の計測モデルだけでなく時価ベースの計測モデルへも，また，ローン以外の資産を含むポートフォリオへも適用可能である。

本稿の構成は以下である。第Ⅱ章ではハイブリッド法を定式化し，第Ⅲ章で数値例を示して，第Ⅳ章でまとめる。

Ⅱ モ デ ル

本章では，ハイブリッド法を定式化する。ハイブリッド法は，Martin et al. [2001a] の条件付デフォルトモデルにおける離散的な潜在変数を連続変数に拡張し，その実現値をモンテカルロ・シミュレーションで発生させて計算する手法である。定式化の後に，より高精度の推定値を得るための方法と，第Ⅲ章の応用事例で用いる KM モデルについても述べる。

2） この場合，デフォルト事象は潜在変数を介して依存性を持つことになる。

1 設 定

現在時刻を $t=0$，リスク計測時点を $t=T>0$ とする。n 個の資産からなるポートフォリオを π，π における資産 j の保有量を定数 a_j，時刻 t における資産 j の単位量あたりの価格を $X_j(t)$ とすると，時刻 t におけるポートフォリオ π の価格は $X(t)=\sum_{j=1}^{n}a_jX_j(t)$ である。また，資産 j $(1\leq j\leq n)$ のデフォルト時刻を τ_j とする。

シミュレーション法では，リスク計測時点 T までの各種変数の推移および各資産のデフォルト／非デフォルト状態を記述するシナリオを発生させるが，ハイブリッド法ではこのシナリオを2つに分割し，リスク計測時点 T における全保有資産のデフォルト／非デフォルト状態を記述した部分をデフォルトシナリオ，シナリオ全体からデフォルトシナリオを除外した部分を基礎ファクターシナリオと呼ぶ。基礎ファクターシナリオはあらかじめ設定された基礎変数ベクトルのサンプルパスであり，基礎変数の候補としては金利期間構造，各資産の回収率，株価や為替レートなどの経済変数などが考えられる。さらに，デフォルトは条件付独立，すなわち，基礎ファクターシナリオが与えられたとき，各資産のデフォルトは独立に発生することを仮定する。

基礎ファクターシナリオを記述するための確率空間 (Ω, G, P) を考える。時刻 t における m 次元の基礎変数ベクトルを $\mathbf{W}(t)=(w_1(t),\cdots,w_m(t))^T$ とすると，$G=(G_t)_{t\geq 0}$ は $\mathbf{W}(t)$ から生成されるフィルトレーション $\sigma(\mathbf{W}(s), 0\leq s\leq t)$ である。リスク計測時点 T までの基礎ファクターシナリオ G_T が与えられると，時刻 T における資産 j の条件付生存確率

$$S_j(T\mid G_T)=P\{\tau_j>T\mid G_T\}$$

や，時刻 T における資産 j の単位量あたりの条件付価格

$$X_j(T\mid G_T)=\begin{cases}X_j^{nd}(T\mid G_T), & \tau_j>T,\\ X_j^{d}(T\mid G_T), & \tau_j\leq T,\end{cases}$$

はそれぞれ既知と仮定する。ただし，デフォルト時刻 τ_j は未知とする。

2 条件付分布

まず，G_T が与えられたときの条件付分布を導出する。ただし，表現の煩わしさを避けるため，本節では条件$(\cdot|G_T)$を省略し，用語からも「条件付」を省略する。

G_T が与えられたとき，リスク計測時点 T におけるポートフォリオ π の価格 $X(T)$ のモーメント母関数 $M_X(s)$ は，$X_j(T)$ が独立なので，

$$\begin{aligned} M_X(s) &= E[\exp\{sX(T)\}] \\ &= \prod_{j=1}^{n} E[\exp\{sa_jX_j(T)\}] \\ &= \prod_{j=1}^{n} [S_j(T)\exp\{sa_jX_j^{nd}(T)\} + \\ &\quad (1-S_j(T))\exp\{sa_jX_j^{d}(T)\}] \end{aligned}$$

と書ける。$M_X(s)$ は $X(T)$ の密度関数 $f_X(u)$ のラプラス変換なので[3]，$M_X(s)$ を逆ラプラス変換すれば密度関数

$$\begin{aligned} f_X(u) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\exp(-us)M_X(s)\,ds \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\exp(K_X(s)-us)\,ds \quad (1) \end{aligned}$$

が得られる。ただし，σ は $M_X(\sigma)$ が存在する範囲の実数とし，$\mathrm{K}_X(s)=\ln M_X(s)$ はキュムラント母関数で，

$$\begin{aligned} \mathrm{K}_X(s) = \sum_{j=1}^{n}\ln[&S_j(T)\exp\{sa_jX_j^{nd}(T)\} \\ &+(1-S_j(T))\exp\{sa_jX_j^{d}(T)\}] \end{aligned}$$

で与えられる。(1)式の経路積分を鞍点法[4]で近似して，低次の項だけ残すと，

$$f_X(u) \cong \frac{\exp(\mathrm{K}_X(\bar{s})-\bar{s}u)}{\sqrt{2\pi \mathrm{K}_X^{(2)}(\bar{s})}}\left[1+\frac{1}{8}\lambda_{(4)}(\bar{s}) - \frac{5}{24}\lambda_{(3)}^2(\bar{s})\right] \quad (2)$$

が得られる[5]。ただし，$\bar{s}$ は $J_X(s)=\mathrm{K}_X(s)-us$ の鞍点，すなわち $dJ_X(s)/ds=0$ の解で，$\mathrm{K}_X^{(l)}(s)$ は $\mathrm{K}_X(s)$ の l 階微分，$\lambda_{(r)}(\bar{s}) = K_X^{(r)}(\bar{s})/(\mathrm{K}_X^{(2)}(\bar{s}))^{r/2}$ である。$\mathrm{K}_X(s)$ の凸性より，鞍点 $\bar{s}$ は一意に求められる。以下では，右辺の括弧内を 1 とする近似を $order=0$ の近似，(2)式全体を $order=1$ の近似と呼ぶ。詳細は略すが，これらは和の分布に関するエッジワース展開のオーダーに対応している。

密度関数 $f_X(u)$ を $u=-\infty$ から積分すれば，$u<E[X(T)]$ に対する分布関数の近似式

$$\begin{aligned} F_X(u) \cong{}& \exp(\mathrm{K}_X(\bar{s})-\bar{s}u+\hat{z}^2/2) \\ &\times\Bigg[(1-\Phi(\hat{z}))\left\{1+\frac{\lambda_{(3)}(\bar{s})\hat{z}^3}{6}+\left(\frac{\lambda_{(4)}(\bar{s})\hat{z}^4}{24}+\frac{\lambda_{(3)}^2(\bar{s})\hat{z}^6}{72}\right)\right\} \\ &+\phi(\hat{z})\left\{-\frac{\lambda_{(3)}(\bar{s})(\hat{z}-1)}{6}-\left(\frac{\lambda_{(4)}(\bar{s})(\hat{z}^3-\hat{z})}{24} +\frac{\lambda_{(3)}^2(\bar{s})(\hat{z}^5-\hat{z}^3-3\hat{z})}{72}\right)\right\}\Bigg] \quad (3) \end{aligned}$$

が得られる[6]。ただし，$\hat{z}=\bar{s}\sqrt{\mathrm{K}_X^{(2)}(\bar{s})}$ で，$\Phi(x)$ と $\phi(x)$ はそれぞれ標準正規分布の分布関数と密度関数である。こちらもエッジワース展開と対応させて，(3)式の右辺括弧内を 1 とする近似を $order=0$, $\lambda_{(3)}$ の一次の項まで考慮する近似を $order=1$，(3)式全体を $order=2$ の近似と呼ぶ。

さらに，

$$\begin{aligned} ES_X(x) &= E[X(T)|X(T)\le x] \\ &= \frac{1}{P\{X(T)\le x\}}\int_{-\infty}^{x} uf_X(u)\,du \end{aligned}$$

3) ただし，通常のラプラス変換とは積分方向が逆である。

4) 鞍点法は工学分野でよく使われる近似法である。経路積分を鞍点を通る経路に変更し，その積分を鞍点近傍からの寄与だけで近似する。

5) 近似式の第 1 項だけならば，通常の鞍点法で容易に得られる。第 2 項以下を得るためには，モーメント母関数を鞍点付近で級数展開してから逆ラプラス変換する。ここで用いる級数展開は，エッジワース展開を求める際に使われるものと同じである。級数展開の詳細に関しては，清水［1976］を参照されたい。以下，本稿では式展開の詳細は省略する。

6) Daniels［1987］は，① X の期待値が u になるように密度関数をシフトさせ，②その密度関数をエッジワース展開し，③項別積分する，という手順で近似式を求めている。なお，(3)式で $\lambda_{(3)}$ の符号を反転させれば，$u>E[X(T)]$ に対する近似式が得られる。

と定義すると，測度変換により，

$$ES_X(x)=\frac{E[X(T)]}{P\{X(T)\leq x\}}F_h(x) \quad (4)$$

と書ける。ただし，$F_h(x)$ は $h(u)=uf_X(u)/E[X(T)]$ を密度関数とする確率測度 P_h の下における $X(T)$ の分布関数で，$M_h(u)=M'_X(u)/M'_X(0)$ である。（4）式の $F_h(x)$ に（3）式の近似式を用いれば，$ES_X(x)$ の近似式が得られる[7)]。$X(T)$ の分布の 100α パーセント点を $A_X(\alpha)(P\{X(T)\leq A_X(\alpha)\}=\alpha)$ とすると，信頼水準 100α パーセントの期待ショートフォールは $ES_X(A_X(\alpha))$ で与えられる。

3　無条件分布

前節で，基礎ファクターシナリオ G_T が与えられたときの $X(T)$ の条件付密度関数と条件付分布関数の近似式（（2）式と（3）式）が得られたので，期待値の chain rule を用いると，無条件密度関数 $f_X(u)$ と無条件分布関数 $F_X(u)$ の近似式は，

$$f_X(u)=E[f_X(u|G_T)],\ F_X(u)=E[F_X(u|G_T)]$$

のそれぞれに近似式を代入すれば得られる。したがって，この場合の分布関数の近似値は，

① 基礎ファクターシナリオをモンテカルロ・シミュレーションで発生させる。
② 基礎ファクターシナリオが与えられたときの条件付分布関数を，（3）式より求める。
③ その条件付分布関数の期待値を求める。

という手順で求められる。①ではモンテカルロ・シミュレーション，②では解析的手法を用いているので，両者を混合した手法という意味で，この方法をハイブリッド法と呼ぶ。

4　加重サンプリング法の適用

第Ⅲ章で具体的に示すが，膨大なシナリオ数のシミュレーションと同程度の結果をハイブリッド法で得るには，ある程度の数の基礎ファクターシナリオが必要である。そこで，より少数の基礎ファクターシナリオから高精度の結果を得る方法として，加重サンプリング法の適用を提案する。加重サンプリング法に関しては湯前・鈴木［2000］を参照されたい。

ある確率過程 $Y(t)$ により，$F_X(u|G_T)$ が成り立つと仮定する。$Y(T)$ の従う密度関数を $p(y)$，別の密度関数を $q(y)$ とすると，$X(T)$ の分布関数 $F_X(u)$ は

$$\begin{aligned}F_X(u)&=E^p[F_X(u|Y(T))]\\&=E^q\left[F_X(u|Y(T))\frac{p(Y(T))}{q(Y(T))}\right] \quad (5)\end{aligned}$$

で与えられる。$E^p(E^Q)$ は，$p(y)(q(y))$ を密度関数とする確率測度 $P(Q)$ における期待値である。モンテカルロ・シミュレーションによる（5）式右辺の推定値を $\hat{F}(u)$，その分散を $V[\hat{F}_X(u)]\equiv E[(\hat{F}_X(u)-F_X(u))^2]$ とすると，$q(y)=p(y)F_X(u|y)/F_X(u)$ のときに $V[\hat{F}_X(u)]=0$ となり，加重サンプリング法の効果が最も大きくなる。しかし $F_X(u)$ は未知なので，シミュレーションによる推定値 $\hat{F}_X(u)$ で代用し，

$$\hat{q}(y)=p(y)F_X(u|y)/\hat{F}_X(u) \quad (6)$$

を密度関数として加重サンプリング法を適用する。（6）式で与えられる密度関数 $\hat{q}(y)$ は u に依存することに注意されたい。第Ⅳ章の計算では $Y(T)$ は正規分布に従うので，$q(y)$ も正規分布の密度関数と仮定し，そのパラメータは（6）式より得られる $\hat{q}(y)$ から推定する。

5　Kijima－Muromachi モデル（KM モデル）

数値例を示す前に，ハイブリッド法の応用例として取り上げる KM モデルについて説明する。Kijima and Muromachi［2000］は，社債など市場性資産のポートフォリオの金利リスクと信用リスクを時価ベースで統合評価するフレームワークを提案した。そこではまず，デフォルトリスクのない割引債の金利過程とデフォルトのハザード率過程を確率微分方程式で

7）この方法は Studer［2001］による。この方法は，n を2以上の自然数としたときの条件付期待値 $E[X^n(T)|X(T)\leq x]$ を求める際にも適用できる。

表現する。これらを基礎方程式として，リスク計測時点 $t=T$ までのシナリオを発生し，同じ基礎方程式をもとに時刻 T における無裁定価格を資産ごとに算出する。これを多数回繰り返して全資産価格の同時分布を求め，ポートフォリオの将来価格の分布を得る。この方法では，現在観測される社債の市場価格と整合的なリスク評価を行うことができる[8)]。以下では，Kijima and Muromachi [2000] で具体的に取り上げられたモデルのみ紹介する。

1）基礎方程式

確率空間 (Ω, F, P) を考える。P は観測確率，$F=(F_t)_{t\geq 0}$は以下の確率モデルから生成されるフィルトレーションであり，リスク中立確率 $\tilde{P}$ はただ一つ存在すると仮定する。

n 個の企業を考える。時刻 t におけるスポットレートを $r(t)$，企業 $j\ (j=1, \cdots, n)$ のデフォルトのハザード率を $h_j(t)$ とする。これらは，観測確率 P の下では

$$dr(t)=a_0(m-r(t))dt+\sigma_0 dz_0(t),$$
$$dh_j(t)=(b_j(t)-a_j h_j(t))dt+\sigma_j dz_j(t),$$
$$j=1, \cdots, n, \tag{7}$$

に従い，リスク中立確率 $\tilde{P}$ の下では

$$dr(t)=(\phi(t)-a_0 r(t))dt+\sigma_0 d\tilde{z}_0(t)$$

に従うと仮定する。また，フォワード中立確率 P^τ のもとにおけるハザード率 $h_j^\tau(t)$ を

$$h_j^\tau(t)=h_j(t)+l_j(t) \tag{8}$$

と仮定する。ただし，$z_j(t)\,(j=0, 1, \cdots, n)$ は P の下における $(n+1)$ 次元標準ブラウン運動，$\tilde{z}_0(t)$ は $\tilde{P}$ の下における標準ブラウン運動で，$a_j, \sigma_j\,(j=0, 1, \cdots, n)$ は非負の定数，$\phi(t)$ と $b_j(t), l_j(t)\,(j=, 1, \cdots, n)$ は時刻 t の確定的な関数とする。また，企業 j のデフォルト時刻 $\tau_j\,(j=, 1, \cdots, n)$ は条件付独立と仮定する[9)]。

8) このフレームワークは，観測確率とリスク中立確率の違いを考慮し，各資産を無裁定評価法で価格付けするなど，従来のリスク計測モデルとは考え方が大きく異なる。

9) この仮定はモデル構築上重要である。Bielecki and Rutkowski [2002] を参照されたい。

2）価格評価

割引社債からなるポートフォリオを考える。時刻 t における満期 $\tau(\tau>t)$ のデフォルトリスクのない割引債の価格は，リスク中立評価法を用いると，

$$\nu_0(t, \tau)=\tilde{E}_t\left[\exp\left\{-\int_t^\tau r(s)ds\right\}\right]$$
$$=A_0(t, \tau)e^{-r(t)B(a_0,t,\tau)} \tag{9}$$

で与えられる。ただし，$\tilde{E}_t$ はリスク中立確率 $\tilde{P}$ における条件付期待値演算子で，

$$A_0(t, \tau)=\exp\left\{\frac{\sigma_0^2}{2a_0^2}(\tau-t-2B(a_0, t, \tau)+B(2a_0, t, \tau))-\int_t^\tau \phi(u)B(a_0, u, \tau)du\right\},$$

$$B(a, t, \tau)=\frac{1-e^{-a(\tau-t)}}{a}$$

である。企業 $j\ (j=, 1, \cdots, n)$が発行した満期 τ の割引社債の時刻 t における無裁定価格は，フォワード中立評価法を用いると，（8）式の仮定より，

$$\nu_j(t, \tau)=\nu_0(t, \tau)E_t^\tau[1_{\{\tau_j>\tau\}}+\delta_j 1_{\{\tau_j\leq\tau\}}]$$
$$=\nu_0(t, \tau)[\delta_j+(1-\delta_j)P^\tau{}_t\{\tau_j>\tau\}]$$
$$=\nu_0(t, \tau)[\delta_j+(1-\delta_j)L_j(t, \tau)P_t\{\tau_j>\tau\}] \tag{10}$$

で与えられる。ただし，E_t^τ はフォワード中立確率 P^τ のもとにおける条件付期待値演算子，1_A は定義関数（A が真ならば 1，偽ならば 0），δ_j は回収率で一定，$P_t\{\tau_j>\tau\}$ および $P_t^\tau\{\tau_j>\tau\}$ はそれぞれ P と P^τ における企業 j の条件付生存確率で，

$$L_j(t, \tau)=\exp\left\{-\int_t^\tau l_j(s)ds\right\}$$

である。また，この割引社債の保有者は，企業 j が満期 τ までにデフォルトしなければ 1 円，時刻 τ までにデフォルトすれば δ_j 円を，どちらも満期 τ に受け取れると仮定した。

（9）式より，$\nu_0(t, \tau)$ は $r(t)$ に依存する。また，条件付独立の仮定より，

$$P_t\{\tau_j>\tau\}=E_t[1_{\{\tau_j>\tau\}}]=E_t[E_\tau[1_{\{\tau_j>\tau\}}]]$$

$$=E_t\left[\exp\left\{-\int_t^\tau h_j(s)ds\right\}\right]$$

となるが，これが $h_j(t)$ に依存するので，(10)式より，$\nu_j(t,\tau)$ は $r(t)$ と $h_j(t)$ に依存する。

3)　ポートフォリオの将来価格の分布

(9)式と(10)式は，$t=0$（現在）にも $t=T>0$（将来）にも適用できるので，リスク計測時点 $T(T\leq\tau)$ における上述の割引社債の価格は次式で与えられる。

$$\nu_j(T,\tau)=\nu_0(T,\tau)[\delta_j+(1-\delta_j)L_j(T,\tau)P_T\{\tau_j>\tau\}1_{\{\tau_j>T\}}]. \tag{11}$$

そこで，モンテカルロ・シミュレーションにより $(r(T), h_1(T), \cdots, h_n(T))$ とデフォルト時刻 $(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ からなるシナリオを多数発生させ，(11)式を用いて各シナリオにおける個々の割引社債価格を求めれば，リスク計測時点 T における割引社債価格の同時分布，そしてポートフォリオの価格分布を求めることができる。この方法では，(7)式の標準ブラウン運動に相関を持たせることにより，$(r(\tau), h_1(\tau), \cdots, h_n(\tau))$ の相関関係も考慮することができる。

詳細は省略するが，このモデルで計算に使用するパラメータは，過去のデフォルト件数の実績や格付け別イールドカーブなどのマーケットデータから推定される。これにより，現在の市場価格と整合的なリスク計測を行うことができる。具体的な計算手順，シナリオ作成法，パラメータ推定法に関しては，Kijima and Muromachi［2000］を参照されたい。

III　数　値　例

本章では数値例を二つ示す。一つは山井・吉羽［2001a］の与信ポートフォリオの信用リスク評価結果との比較による近似式の精度の確認で，もう一つはKMモデルによる社債ポートフォリオの金利リスクと信用リスクの統合評価への応用である。

1　山井・吉羽モデルとの比較

山井・吉羽［2001a］は，モンテカルロ・シミュレーションによるリスク計測結果の安定性を調べるため，ある与信ポートフォリオの信用リスク量をシナリオ数1000のシミュレーションで1000回推定し，推定値の平均，標準偏差，95％信頼区間を求めた。計算に用いた主な条件は，①総エクスポージャ：1000億円，②与信先数：1000件，③個別与信先のエクスポージャの分布：平均1億円の指数分布，④デフォルトによる損失額のみ計測，⑤与信先のデフォルト確率：1％，⑥回収率：ゼロ，⑦デフォルトは独立に発生，などである。ハイブリッド法で言えば，このモデルは基礎変数がない，すなわち基礎ファクターシナリオが確定的な場合に相当するので，第II章で得た近似式の妥当性の確認に利用できる。

第1表に，鞍点法による近似式および正規分布近似で求めたVaRとCVaRの推定値と，山井・吉羽［2001a］の推定結果を示す。この結果から，鞍点法による近似式は山井・吉羽［2001a］の結果と整合的であることがわかる。しかし，オーダーを上げるほどより整合的になるという傾向は見られない。これは，近似式のオーダーが高くなると，高次のモーメントの影響で密度関数に負値が出やすくなることと関係があるように思われる[10)]。なお，正規分布近似はあまり良くないようである。

2　社債ポートフォリオのリスクの統合評価：通常のハイブリッド法

ハザード率の拡散係数をゼロとおいたKMモデルは，ハイブリッド法として見ると，基礎変数がスポットレート $r(t)$ だけのモデルである。しかも，(7)式より $r(t)$ はマルコフ性を持つので，G_T として $r(T)$ を与えれば，

10)　近似式による分布関数の全体像をモンテカルロ・シミュレーションの結果と比較したところ，テイル部分では，近似式はオーダーによらずシミュレーションの結果に近い。しかし，分布のコア部分では $order=0$ の近似式の乖離が大きく，オーダーが上がるとシミュレーションの結果に近付く。

第1表 与信ポートフォリオの VaR と CVaR（山井・吉羽モデル）

	信頼水準	近似式			正規分布近似	山井・吉羽		
		order 0	order 1	order 2		平　均	標準偏差	信頼区間
VaR	95%	18.31	18.07	18.33	17.30	18.28	0.43	[17.39, 19.10]
	99%	22.52	22.37	22.69	20.33	22.65	0.79	[21.21, 24.33]
CVaR	95%	21.00	20.69	20.41	19.16	20.99	0.52	[20.03, 22.02]
	99%	24.91	24.68	24.37	24.84	24.90	1.02	[22.99, 26.99]

第2表 ハイブリッド法とシミュレーションの比較

	信頼水準	ハイブリッド法（S：シナリオ数）			混合正規	シミュレーション		
		S=10	S=200	S=1000	S=1000	平　均	標準偏差	max-min
パーセント点	10.0%	1047.68	1039.66	1039.16	1039.41	1038.98	0.34	1.09
	5.0%	1036.60	1024.36	1023.50	1024.19	1023.27	0.70	2.25
	1.0%	1017.27	997.78	995.04	996.63	993.48	1.49	4.70
	0.5%	1010.34	988.97	985.21	987.12	982.97	2.08	7.40
期待ショートフォール	10.0%	1034.84	1021.05	1019.83	1019.96	1018.64	0.72	2.12
	5.0%	1026.21	1008.99	1007.06	1007.48	1005.36	1.11	3.18
	1.0%	1009.44	987.50	983.16	984.36	979.99	1.85	6.76
	0.5%	1003.08	979.98	974.77	976.40	970.96	2.15	6.70

$$
\begin{aligned}
&\left(S_j(T|G_T),\, X_j^{nd}(T|G_T),\, X_j^d(T|G_T)\right)\right) \\
&= \left(S_j(T|\,r(T)),\, X_j^{nd}(T|\,r(T)),\right. \\
&\quad \left. X_j^d(T|\,r(T))\right), \qquad j = 1, \cdots, n,
\end{aligned}
$$

が具体的に得られるので，無条件分布をハイブリッド法で求めることができる。

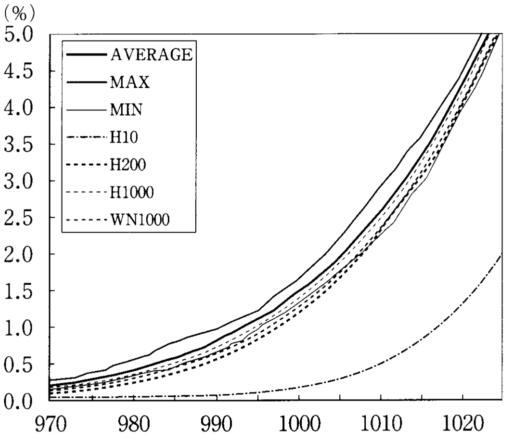
リスク計測対象とするポートフォリオは，満期5年の割引社債100銘柄（Aaa, Aa, A, Baa 格は額面3，6，9，…，30を1銘柄ずつ計10銘柄；Ba, B 格は額面1，2，3，…，30を1銘柄ずつ計30銘柄）で，発行体はすべて異なる企業とする。また，デフォルト確率は Moody's の公表データを参考に格付けごとに与え，回収率はすべて0，金利過程のボラティリティは $\sigma_0 = 0.01$（1%）とする。その他のパラメータは Kijima and Muromachi [2000] と同じ値を用いることにして，本稿では省略する。リスク計測時点は $T=1$ 年とし，シミュレーションはシナリオ数10000で10セット行った。

第2表に，$order=2$ のハイブリッド法[11]，混合正規分布近似[12]，モンテカルロ・シミュレーションによるパーセント点とそれに対応する期待ショートフォールの推定結果を示す。基礎ファクターシナリオ数の増加とともに，ハイブリッド法による推定値はシミュレーション結果に近付く。しかし，シミュレーション結果を信頼するならば，基礎ファクターシナリオ数1000のハイブリッド法の推定値は概ね（平均＋標準偏差）程度であり，精度にはやや不満が残る。また，ハイブリッド法の結果は，テイルの先に行くほどシミュレーション結果から乖離する。鞍点近似自体の精度はこの程度では悪化しないので，この乖離は生成される基礎ファク

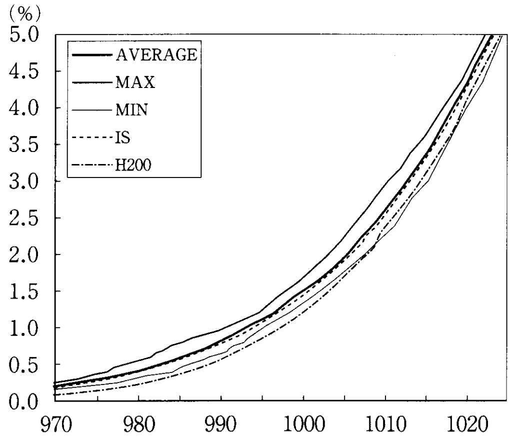
11） 予備的に他のオーダーの計算も行ったところ，オーダーが高くなるほどシミュレーション結果に接近するという結果を得たので，ここでは $order=2$ を用いた。

12） 条件付分布を正規分布で近似したものが，混合正規分布近似である。正規分布のパラメータは，条件付期待値と条件付分散から求める。

第１図　ハイブリッド法とシミュレーション法による分布関数



第２図　加重サンプリング法を用いたハイブリッド法による分布関数



ターシナリオに起因する。なお，混合正規分布近似の乖離幅は，ハイブリッド法よりも少し大きい。

第１図に，テイル部分の分布関数の推定結果を示す。図中の AVERAGE，MAX，MIN はそれぞれシミュレーション結果の平均，最大値，最小値である。また，H はハイブリッド法，WN は混合正規分布近似を示し，その後の数値は基礎ファクターシナリオ数である。基礎ファクターシナリオの増加とともに，ハイブリッド法による推定値はシミュレーションの平均値に接近する。H1000はこの領域では最大値と最小値の間に収まるが，常に平均より小さい値をとる。すなわち，シミュレーションの平均は，H1000よりもファットテイルな分布である。H200は２％以下の領域では最大値と最小値の枠から外れる。WN1000もこの領域では H200とほぼ同程度だが，この図の左側，よりテイルの先の領域では H200の方がファットテイルになる。ファットテイルな分布を表現するには，混合正規分布よりも鞍点法を用いたハイブリッド法の方が適しているようである。

3　社債ポートフォリオのリスクの統合評価：加重サンプリング法によるハイブリッド法

第２図に，前節と同じモデルに対して加重サンプリング法を適用した場合の結果を示す。図中の記号は第１図と同じで，IS が加重サンプリング法による推定値である。IS は，

- Step 1　シナリオ数 $N=10$ の通常のシミュレーションを行い，(6)式より $\hat{q}(y)$ を求める。
- Step 2　$\hat{q}(y)$ に最もよくあう正規分布 $q(y)$ のパラメータを求める。
- Step 3　$q(y)$ を用いて $N=10$ のシミュレーションを行い，(6)式より $\hat{q}(y)$ を求める。
- Step 4　$\hat{q}(y)$ に最もよくあう正規分布 $q(y)$ のパラメータを求める。
- Step 5　推定された $q(y)$ のパラメータが収束すれば終了。それ以外は Step 3 へ。

という手順で最適な密度関数 $q(y)$ を求め，それに従って発生させたシナリオ数100のシミュレーションによる推定値である[13]。

第２図より，IS は AVERAGE に非常に近い値をとることがわかる。もし AVERAGE を信頼するならば，IS の精度は H1000を遥かに上回る。また，単純なハイブリッド法ではテイルの先に行くほどシミュレーション結果から乖離する傾向が見られたが，IS には全く見られ

13)　パラメータ推定の繰り返し回数は最大10回としたところ，ほとんどの点で３回で収束したので，IS で使用した基礎ファクターシナリオ数は平均130程度である。

ず，逆にテイルの先に行くほどシミュレーション結果に近付くという結果が得られた。

計算負荷に関しては単純に比較できないが，Pentium4，2.4GHz のパソコンを使った今回の計算では，10000シナリオのシミュレーションで分布を得るための所要時間は約14分，ハイブリッド法で100ヶ所の x における $F_X(x)$ と $ES_X(x)$ を得るための時間は，H1000で約15分，IS では約22分であった。加重サンプリング法の計算のほとんどは $q(y)$ のパラメータ推定であり，この推定の効率性が所要時間を決めている。もしも適切な $q(y)$ が既知ならば，IS の所要時間は H1000の約1/10になる。

IV　おわりに

本稿では，Martin et al. [2001a] の条件付デフォルトモデルを拡張したハイブリッド法について述べた。また，少数の基礎ファクターシナリオから高精度の結果を得るために加重サンプリング法の適用を提案し，この方法により，ごく少数のシナリオから非常に高精度の結果が得られることを数値的に示した。混合正規分布近似でも，ハイブリッド法にやや劣る程度の結果が得られることを示したが，基礎変数がない場合や離散変数の場合を考慮すると，一般的な方法としては，鞍点近似を用いるハイブリッド法の方が優れている。

ハイブリッド法では基礎ファクターシナリオをモンテカルロ・シミュレーションで発生させるので，非常に幅広いモデルに適用することができる。第Ⅲ章に示した応用例だけでなく，デフォルト確率が金利に依存する場合にも，さらに株価や為替レートなどの経済変数に依存する場合にも適用可能である。また，リスク計測時点における特定企業のデフォルト／非デフォルト状態を基礎変数に組み込めば，ある企業の存亡が他企業のデフォルト確率に影響を与えるような親子関係（あるいはグループ企業関係）を考慮した信用リスク計測にも適用可能である。さらに，Gordy [2000] によると，CreditMetrics も条件付独立なモデルと解釈することができるので，CreditMetrics にもハイブリッド法を適用できる。本稿ではデフォルト／非デフォルトの2状態しか扱わなかったが，CreditMetrics のように状態数が3以上の場合でも，各状態の実現確率とそのときの価格が条件付きで与えられればハイブリッド法を適用できる。もちろん，条件さえ満たされていれば，社債以外の資産からなるポートフォリオにも適用可能である。

シミュレーション法では，ポートフォリオの VaR や CVaR だけでなく，それらのリスク量へのサブポートフォリオの寄与度（リスク寄与度）も激しく不安定になることが指摘されているが，ハイブリッド法の最大の特徴である計算結果の安定性はリスク寄与度の計算にも生かすことができる。この問題に関しては，稿を改めて議論する。

参考文献

Artzner, P., F. Delbaen, J.M. Eber, D. Heath [1999] "Coherent measures of risk," *Mathematical Finance*, 9, pp.203-228.

Arvanitis, A., C. Browne, J. Gregory, R. Martin [1999] "Credit loss distribution and economic capital," *Working Paper*, Paribas.

Arvanitis, A., J. Gregory [1998] "Credit risk toolbox," *RISK*, December, pp.50-55.

Bielecki, T. R., M. Rutkowski [2002] *Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging*, Springer.

Credit Suisse Financial Products [1997] *CREDITRISK +*, Credit Suisse Financial Products.

Daniels, H. [1987] "Tail probability approximations," *International Statistical Review*, 55, pp.37-48.

Gordy, M. [2000] "A comparative anatomy of credit risk models," *Journal of Banking and Finance*, 24, pp.119-149.

J P Morgan [1997] *CreditMetrics Technical Document*, J P Morgan.

Kijima, M., Y. Muromachi [2000] "Evaluation of credit risk of a portfolio with stochastic interest rate and default processes," *Journal of Risk,* 3, pp.5-36.

Martin, R. , K. Thompson, C. Browne [2001a] "Taking to the saddle," *RISK,* June, pp.91-94.

—— [2001b] "VaR : who contributes and how much?" *RISK,* August, pp.99-102.

Studer, M. [2001] "Stochastic Taylor expansions and saddlepoint approximations for risk management," *Dissertion of ETH,* No.14242.

清水良一［1976］『中心極限定理』教育出版。

室町幸雄［2001］「個別資産へのリスクの配分とポートフォリオの最適化」『ニッセイ基礎研所報』第16巻，77-100ページ。

山井康浩・吉羽要直［2001a］「期待ショートフォールによるポートフォリオのリスク計測―具体的な計算例による考察―」『金融研究』第20巻 別冊第2号，53-93ページ。

——［2001b］「バリュー・アット・リスクのリスク指標としての妥当性について ―理論的サーベイによる期待ショートフォールとの比較分析―」『金融研究』第20巻 第2号，33-68ページ。

——［2001c］「リスク指標の性質に関する理論的整理 ―VaRと期待ショートフォールの比較分析―」『金融研究』第20巻 第2号，95-131ページ。

湯前祥二・鈴木輝好［2000］『モンテカルロ法の金融工学への応用』朝倉書店。